数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 30-38

準凸不等式系に対する非線形かつ大域的な error bound に関する一考察

島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域 鈴木 聡
Satoshi Suzuki
Department of Mathematics, Shimane University
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域 黒岩 大史
Daishi Kuroiwa
Department of Mathematics, Shimane University

概要

本講究録では，準凸不等式系に対する非線形かつ大域的な error bound について述べる．特に近年筆者等によって示された，準凸関数の生成集合を用いた error bound について具体例を用いて考察する．

1 導入

本講究録では以下のような不等式について考察する: 任意の $x\in T$ に対して，

$$d(x,A)\leq h([g(x)]_{+}).$$

ただし，X : ヒルベルト空間，$g: X\to[-\infty,\infty]$, $A:=\{x\in X\mid g(x)\leq 0\}$, $T\subset X$, $h: [0,\infty)\to[0,\infty]$ かつ $h(0)=0$ を満たすものとし，$d(x,A):=\inf_{y\in A}\|x-y\|$, $[\alpha]_{+}:=\max\{\alpha,0\}$ と定義する．上記の不等式は error bound と呼ばれ，主に h と T の性質によって分類されている．h が線形関数である場合には Lipschitz 型，h がべき関数である場合には Hölder 型と呼ばれ，h が非線形であるような error bound も研究されている．また，T が全空間 X である場合には大域的，T があるベクトル x_0 の近傍である場合には局所的と呼ばれる．関数 g が凸関数である場合には主に Lipschitz 型 error bound が研究

(鈴木, 黒岩) 〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060.
本研究は JSPS 科研費 JP15K17588, JP16K05274 の助成を受けたものです．

されることが多く, 有用な結果が数多く示されている. 一方で非凸関数においては, 容易に想像できるように大域的 Lipschitz 型 error bound の存在を示すことは難しい場合が多い. よってこのような場合には, Hölder 型あるいは非線形 error bound の存在性についての研究が成されている. 詳細は [1–12, 14–16, 25] を参照のこと. また error bound は多くの応用を持っている. 特にアルゴリズムの収束に関しては well-posedness という概念が有用であるが, これは error bound に関する重要な応用の一つとなっている.

本講究録では [25] において我々が示した, 準凸不等式系に対する非線形かつ大域的な error bound に関する結果を紹介し, 具体例を用いた考察を行う.

2 準備

X をヒルベルト空間とし, $\langle x,y\rangle$ は二つのベクトル x, y の内積を表すものとする. $A\subset X$ に対して, その境界, 錐包をそれぞれ bd$A$, cone$A$ と表す. A の $x\in A$ における法線錐を $N_A(x):=\{v\in X\mid \forall y\in A, \langle v,y-x\rangle\leq 0\}$ と定義する. $x\in X$ から A への最短距離を $d(x,A)$ で表す: すなわち

$$d(x,A):=\inf_{y\in A}d(x,y)$$

である.

f を X から $\overline{\mathbb{R}}:=[-\infty,\infty]$ への関数とする. このとき,

$$\mathrm{dom}f:=\{x\in X\mid f(x)<\infty\}$$

を f のドメイン,

$$\mathrm{epi}f:=\{(x,r)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)\leq r\}$$

を f のエピグラフという. f が凸関数であるとは epi$f$ が凸集合であるときをいう. f が準凸関数であるとは, 任意の $\beta\in\mathbb{R}$ に対して $\{x\in X\mid f(x)\leq\beta\}$ が凸集合であるときをいう. また, f が準アフィン関数であるとは f 及び $-f$ が準凸関数であるときをいう. f が下半連続準アフィンであることと $f=k\circ w$ が成り立つような $k\in Q:=\{h:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}\mid h:\text{ 下半連続非減少 }\}$ 及び $w\in X$ が存在することは同値である. さらに重要なこととして, f が下半連続準凸関数であることと $f=\sup_{j\in J}k_j\circ w_j$ が成り立つような $\{(k_j,w_j)\mid j\in J\}\subset Q\times X$ が存在することは同値である. 詳細は [13, 17] を参照のこと. この結果により, 下半連続準凸関数はある下半連続準アフィン関数族の上限として表されることがわかる.

そこで我々は [18] において準凸関数の生成集合を次のように定義した．すなわち，$G = \{(k_j, w_j) \mid j \in J\} \subset Q \times X$ が f の生成集合であるとは $f = \sup_{j\in J} k_j \circ w_j$ が成り立つときをいう．明らかに全ての下半連続準凸関数は少なくとも一つの生成集合を持つが，実際には一つの関数に対して無数に多くの生成集合が存在する．実際，$G = \{(k_i, w_i) \mid i \in I\}$ を f の生成集合とすると，任意の $\alpha > 0$ に対して

$$\left\{(h_i, u_i) \middle| i \in I, h_i(t) = k_i(\alpha t), u_i = \frac{w_i}{\alpha}\right\}$$

もまた f の生成集合となる．これは f に対して非加算無限個の異なる生成集合が存在することを示している．

ここでは重要な生成集合の例をいくつか挙げておく．一つ目は，上記の生成集合 G の正規化である．任意の $i \in I$ に対して $w_i \neq 0$ であるとき，

$$\left\{(h_i, u_i) \middle| i \in I, h_i(t) = k_i(\|w_i\|t), u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}\right\}.$$

は f の生成集合となる．さらに h_i をうまくまとめることにより，添字集合をコンパクト化することも出来る．詳細は [18, 19, 22, 27] を参照のこと．次に挙げる生成集合も重要である．

$$\{(k, w) \in Q \times X \mid k \circ w \leq f\}.$$

この生成集合は包含関係に関して最大である．すなわち，任意の生成集合は上記の生成集合に含まれている．このように生成集合が数多く存在することから，目的に応じた適切な生成集合の選択は準凸解析における重要なポイントの一つになっている．詳細は [18–27] を参照のこと．

この章の最後に，逆関数の一般化概念について紹介する．次の関数 h^{-1} を $h \in Q$ の hypo-epi-inverse という:

$$h^{-1}(a) := \sup\{b \in \mathbb{R} \mid h(b) \leq a\}.$$

[17] において，h が逆関数を持つ場合には逆関数と hypo-epi-inverse が一致することが示されている．よって本講究録では hypo-epi-inverse を h^{-1} と表す．

3 準凸不等式系に対する error bound について

[25] において我々は，準凸不等式系に対する非線形かつ大域的な error bound の存在性

について述べた．まず, error bound の存在性を示すために使用した生成集合について紹介する．

任意の $w \in X$ に対して, $g_w : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ を以下のように定義する:

$$g_w(a) := \inf\{g(x) \mid \langle w, x\rangle \geq a\}.$$

明らかに, g_w は非減少関数である．また, g が下半連続準凸関数であるとき,

$$g = \sup_{\|w\|=1} g_w \circ w = \sup_{\|w\|=1} (\mathrm{cl}\ g_w) \circ w$$

が成り立つ．ただし, cl g_w は g_w の閉包であり, $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}\ g_w) = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\ g_w)$ が成り立つものとする．上記等式は分離定理を用いて示すことが出来る．詳細は [17, 22, 25–27] を参照のこと．

上記等式は $G = \{(\mathrm{cl}\ g_w, w) \mid \|w\| = 1\} \subset Q \times X$ が g の生成集合であることを意味している．一方で, $\{(g_w, w) \mid \|w\| = 1\}$ は一般的には生成集合ではない．実際, 生成集合はその定義から $Q \times X$ の部分集合でなければならないが, g_w は下半連続関数であるとは限らないからである．しかしながら, 準凸不等式系に対する error bound の存在に関しては $\{(g_w, w) \mid \|w\| = 1\}$ が重要な役割を成す．

g_w を用いて次のように関数 $h : \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \to [0, \infty]$ を定義する:

$$h(t) := \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ g_w^{-1}(0) \in \mathbb{R}}} h_w(t).$$

ただし, $h_w(t) := g_w^{-1}(t) - g_w^{-1}(0)$ である．この非線形関数 h を用いることにより, 次のように準凸不等式系に対する非線形かつ大域的な error bound の存在性を示した．

定理 1. [25] X : ヒルベルト空間, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, 下半連続準凸関数, $A = \{x \in X \mid g(x) \leq 0\}$ とし, $\emptyset \neq A \neq X$ かつ任意の $x \in \mathrm{bd}A$ に対して

$$N_A(x) \subset \mathrm{cone}\{w \in X \mid \|w\| = 1, g_w^{-1}(0) = \langle w, x\rangle\}$$

が成り立つと仮定する．

このとき, g は非線形かつ大域的な error bound をもつ．すなわち任意の $x \in \mathrm{dom} g$ に対して,

$$d(x, A) \leq h([g(x)]_+).$$

また, [25] において, error bound の応用として well-posedness に関する結果を導いた．まず well-posedness の定義について述べる．点列 $\{x_k\} \subset X$ は $g(x_k) \to \inf_{x \in X} g(x)$ を

満たすとき, minimizing sequence と呼ばれる. 関数 g が well-posed であるとは, 任意の minimizing sequence $\{x_k\} \subset X$ に対して, $d(x_k, S) \to 0$ が成り立つときをいう. ただし $S = \{x \in X \mid g(x) = \inf_{y \in X} g(y)\}$, すなわち S は g の X 上での最小化問題に関する解集合である.

次の定理は g が well-posed であるための十分条件を与えている.

定理 2. [25] $\emptyset \neq S \neq X$, $\inf_{y \in X} g(y) = 0$, 任意の $x \in \mathrm{bd}S$ に対して,

$$N_S(x) \subset \mathrm{cone}\{w \in X \mid \|w\| = 1, g_w^{-1}(0) = \langle w, x \rangle\}$$

かつ $\inf_{t>0} h(t) = 0$ が成り立つと仮定する.

このとき, g は well-posed である. すなわち, 任意の minimizing sequence $\{x_k\} \subset X$ に対して, $d(x_k, S) \to 0$.

4 適用例と考察

定理 1 の適用例として, 以下の二つをあげる.

例 1. g を次のような $\mathbb{R}$ 上の関数とする.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in [1, \infty), \\ 0, & x \in [-1, 1], \\ (x+1)^2, & x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

このとき g は実数値凸関数であり $A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\} = [-1, 1]$ である. A の境界での微分は 0 となることから, Lipschitz 型 error bound は存在しない.

g_1 および g_{-1} を計算すると,

$$g_1(t) = g_{-1}(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & t \in [1, \infty), \\ 0, & t \in (-\infty, 1]. \end{cases}$$

であることがわかる. よって

$$g_1^{-1}(t) = g_{-1}^{-1}(t) = \begin{cases} \sqrt{t} + 1, & t \in [0, \infty), \\ -\infty, & t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

であるので, 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$h(t) = \max\{h_1(t), h_{-1}(t)\} = g_1^{-1}(t) - g_1^{-1}(0) = \sqrt{t}$$

となる.

またこのとき, 任意の $x \in \mathrm{bd}A$ に対して

$$N_A(x) \subset \mathrm{cone}\{w \in \mathbb{R} \mid |w| = 1, g_w^{-1}(0) = wx\}$$

が成り立つことは容易に確かめられる. 以上のことから, 定理 1 より g は非線形かつ大域的な error bound をもつ.

実際, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$d(x, A) \leq h([g(x)]_+)$$

が成り立つ. ここでの代理関数 h はべき関数であるので, Hölder 型 error bound であるともいえる.

例 2. [25] g を次のような $\mathbb{R}^2$ 上の関数とする:

$$g(x) = \begin{cases} \log(\|x\|), & x \neq 0, \\ -\infty, & x = 0. \end{cases}$$

このとき, g は下半連続準凸関数であり, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ である. 明らかに, Lipschitz 型, Hölder 型 error bound は存在しない.

一方でこのとき A がコンパクトであることから, 任意の $x \in \mathrm{bd}A$ に対して

$$N_A(x) \subset \mathrm{cone}\{w \in \mathbb{R}^2 \mid \|w\| = 1, g_w^{-1}(0) = \langle w, x \rangle\}$$

が成り立つ. 詳細は [19, 22, 25–27] を参照のこと. よって定理 1 より, g は非線形かつ大域的な error bound をもつ.

任意の $\|w\| = 1$ を満たす $w \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$g_w(t) = \begin{cases} \log t, & t > 0, \\ -\infty, & t \leq 0, \end{cases}$$

であるので, $g_w^{-1}(t) = e^t$ となる. よって,

$$h_w(t) = g_w^{-1}(t) - g_w^{-1}(0) = e^t - 1$$

であることから

$$h(t) = \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ g_w^{-1}(0) \in \mathbb{R}}} h_w(t) = e^t - 1$$

となり, 非線形代理関数 h が求められる.

任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して, $x \notin A$ のとき,

$$h([g(x)]_+) = h(g(x)) = e^{\log(\|x\|)} - 1 = \|x\| - 1 = d(x, A).$$

また, $x \in A$ のとき,

$$h([g(x)]_+) = h(0) = 0 = d(x, A).$$

が成り立つ. これは g が非線形かつ大域的な error bound をもつことを示している.

定理 2 において, 我々は well-posedness に対する次の二つの十分条件を示した:

(i) 任意の $x \in \mathrm{bd}S$ に対して,

$$N_S(x) \subset \mathrm{cone}\{w \in X \mid \|w\| = 1, g_w^{-1}(0) = \langle w, x \rangle\},$$

(ii) $\inf_{t>0} h(t) = 0$.

条件 (i) は Q-BCQ と呼ばれ, いくつかの十分条件や同値条件が示されている. [19, 22, 27] を参照のこと. 一方で, '$\inf_{t>0} h(t) = 0$' については未だ研究が十分ではない. 本講究録で述べた上記二つの例や [25] で述べた例においてはこの条件は満たされているが, 一般的にこの条件が成り立つかどうかを確認するのは容易ではない. 今後の研究として, well-posedness の十分条件という観点から言えば『Q-BCQ が成り立つが条件 (ii) が成り立たない』といった状況を示す例はまだ見つかっていない. このことは, 『Q-BCQ が成り立つならば条件 (ii) が成り立つ』という命題が真である可能性を示唆するものであり, 詳細な研究が待たれるところである.

参考文献

[1] Azé, D.: A survey on error bounds for lower semicontinuous functions. ESAIM Proc. 13, 1–17 (2003)

[2] Azé, D., Corvellec, J. N.: Characterizations of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10, 409–425 (2004)

[3] Bosch, P., Jourani, A., Henrion, R.: Sufficient conditions for error bounds and applications. Appl. Math. Optim. 50, 161–181 (2004)

[4] Chao, M., Cheng, C.: Linear and nonlinear error bounds for lower semicontinuous functions. Optim. Lett. 8, 1301–1312 (2014)

[5] Corvellec, J. N., Motreanu, V. V.: Nonlinear error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces. Math. Program. 114, 291–319 (2008)

[6] Fabian, M. J., Henrion, R., Kruger, A. Y., Outrata, J. V.: Error bounds: necessary and sufficient conditions. Set-Valued Anal. 18, 121–149 (2010)

[7] Hoffman, A. J.: On approximate solutions of systems of linear inequalities. J. Research Nat. Bur. Standards 49, 263–265 (1952)

[8] Hu, H.: Characterizations of local and global error bounds for convex inequalities in Banach spaces. SIAM J. Optim. 18, 309–321 (2007)

[9] Kruger, A. Y., Ngai, H. V., Théra, M.: Stability of error bounds for convex constraint systems in Banach spaces. SIAM J. Optim. 20, 3280–3296 (2010)

[10] Le Thi, H. A., Pham Dinh, T., Ngai, H. V.: Exact penalty and error bounds in DC programming. J. Global Optim. 52, 509–535 (2012)

[11] Lewis, A. S., Pang, J. S.: Error bounds for convex inequality systems. Nonconvex Optim. Appl. 27, 75–110 (1998)

[12] Li, G.: Global error bounds for piecewise convex polynomials. Math. Program. Ser. A 137, 37–64 (2013)

[13] Martínez-Legaz, J. E.: Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods. Optimization. 19, 603–652 (1988)

[14] Pang, J. S.: Error bounds in mathematical programming. Math. Programming 79, 299–332 (1997)

[15] Penot, J. P.: Well-behavior, well-posedness and nonsmooth analysis. Pliska Stud. Math. Bulgar. 12, 141–190 (1998)

[16] Penot, J. P.: Error bounds, calmness and their applications in nonsmooth analysis. Contemp. Math. 514, 225–247 (2010)

[17] Penot, J. P., Volle, M.: On quasi-convex duality. Math. Oper. Res. 15, 597–625 (1990)

[18] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming. J. Optim. Theory Appl. 149, 554–563 (2011)

[19] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming. Nonlinear Anal. 74, 1279–1285 (2011)

[20] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Sandwich theorem for quasiconvex functions and its applications, J. Math. Anal. Appl. 379, 649–655 (2011)

[21] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Subdifferential calculus for a quasiconvex function with generator, J. Math. Anal. Appl. 384, 677–682 (2011)

[22] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming. Nonlinear Anal. 75, 2851–2858 (2012)

[23] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality. J. Optim. Theory Appl., 152, 366–367 (2012)

[24] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Some constraint qualifications for quasiconvex vector-valued systems. J. Global Optim., 55, 539–548 (2013)

[25] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Nonlinear Error Bounds for Quasiconvex Inequality Systems, Optim. Lett. to appear. DOI: 10.1007/s11590-015-0992-2

[26] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Duality Theorems for Separable Convex Programming without Qualifications, J. Optim. Theory Appl. to appear. DOI: 10.1007/s10957-016-1003-1

[27] Suzuki, S., Kuroiwa, D.: Generators and constraint qualifications for quasiconvex inequality systems. J. Nonlinear Convex Anal., to appear.